Асимптотические свойства двумерного интегрального уравнения крыла конечного размаха

Сумбатян М.А. (ЮФУ)

Asymptotic properties of the 2d integral equation of a finite-span wing

Sumbatyan M.A. (SFEDU)

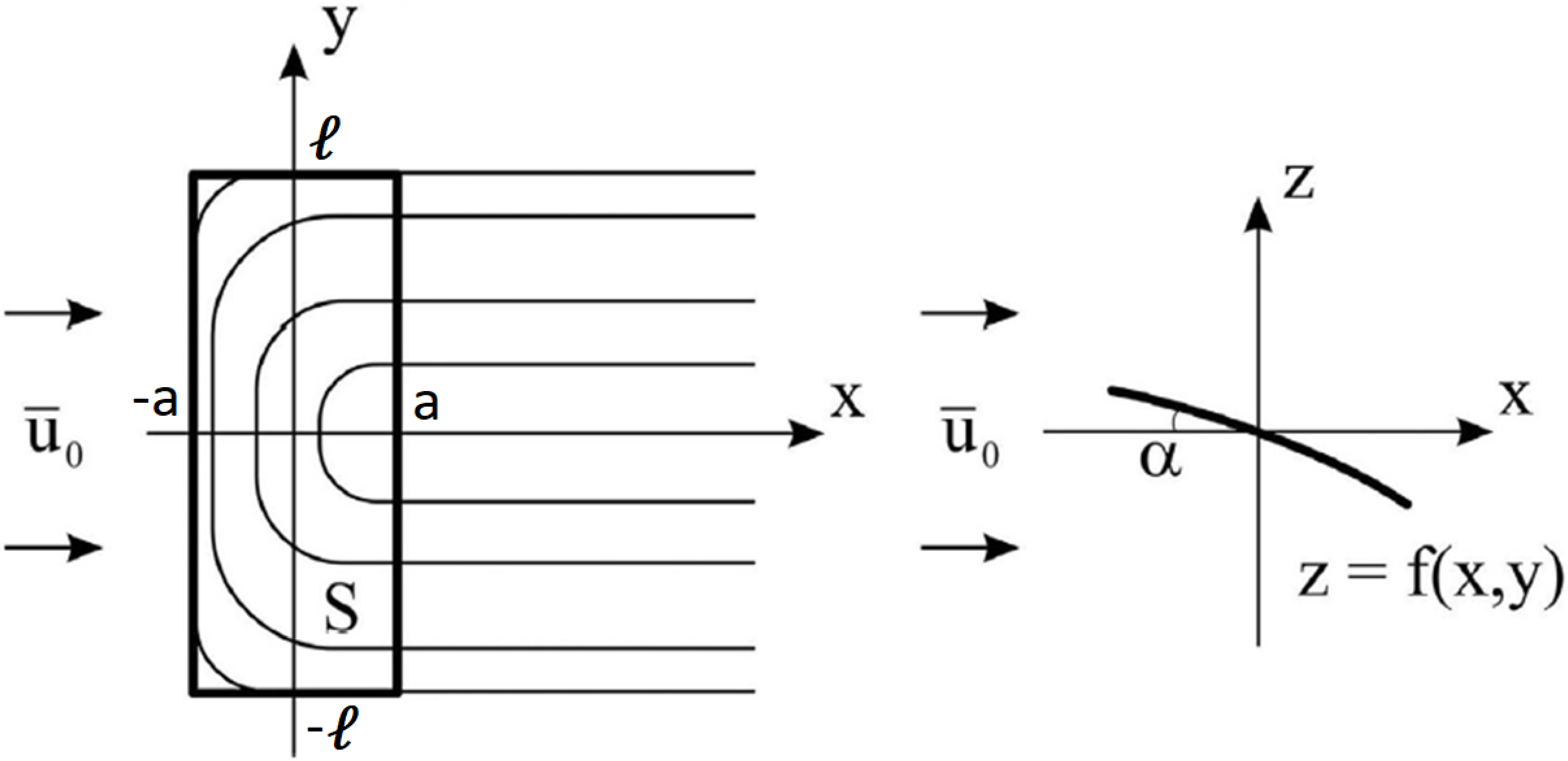

Fig. 1. A lifting surface in the steady flow of a non-viscous incompressible fluid.

Основное уравнение

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}+1\right]\frac{\gamma(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{(y-\eta)^2}=u_0\frac{\partial f}{\partial x}=F(x,y),\ \ (x,y)\in S. \quad (1)$$

Численные методы:

Метод дискретных вихрей: Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.

На западе называется Panel Method.

M.A.Sumbatyan, A.A.Bondarchuk, K.I.Mescheryakov //

Mechanics Research Communications. 2018. V.89. P.18-22.

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}+1\right]\frac{\gamma(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{(y-\eta)^2} = u_0\frac{\partial f}{\partial x} = F(x,y),\ \ (x,y)\in S. \quad (1)$$

<u>Физические условия:</u>

$$\gamma(x,\ell)=\gamma(x,-\ell)=\gamma(a,y)=0$$

<u>Аналитические свойства</u> – неизвестны (разрешимость, единственность, в каких пространствах? Поведение решения в углах?)

Ядро – гиперсингулярное по размаху ($1/(y-\eta)^2$) -->

Огранич. единств. реш. стремится к нулю при y=ℓ, y=-ℓ.

Асимптотический подход при большом удлинении

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\lambda}^{\lambda} K(x-\xi, y-\eta) g(\xi,\eta) d\xi d\eta = -V_0\alpha_0, \quad (|x|<1,\ |y|<\lambda)$$

$$K(x,y) = \frac{1}{y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\right), \qquad \lambda = \ell / a >> 1$$

Ищем решение в виде:

$$g(\xi,\eta) = \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\sum_{k=0}^{\infty} g_k(\eta) P_k^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(\xi)$$

$$K(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{i\alpha} e^{i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha d\beta - \pi\int_{-\infty}^{\infty} |\beta| e^{i\beta y}\, d\beta\right]$$

И умножим уравнение скалярно на функции:

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} P_n^{\left(-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right)}(x), \ (n = 0,1,\ldots)$$

Приходим к бесконечной системе одномерных уравнений:

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda} K_{nk}(y-\eta)g_k(\eta)d\eta = F_n(y), \quad (n=0,1,\ldots), \quad |y|<\lambda$$

$$K_{nk}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} L_{nk}(\beta)e^{i\beta y}d\beta, \quad F_0(y) = V_0\alpha_0, \quad F_n(y)\equiv 0 \ \ (n\geq 1)$$

Асимптотическая оценка: $L_{nk}(\tilde{\beta}) = O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^{2|k-n|}}\right), \ (k\neq n), \quad L_{nn}(\tilde{\beta}) = O(1), \quad \lambda\to\infty$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} K_0(y-\eta)g_0(\eta)d\eta = V_0\alpha_0, \quad |y|<\lambda,$$

$$K_0(y) = \int_{-\infty}^{\infty} L_0(\beta)e^{i\beta y}d\beta, \quad L_0(\beta) = 2\int_0^{\infty}\frac{J_0(\alpha)J_1(\alpha)}{\alpha}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,d\alpha + \frac{\pi}{2}|\beta|$$

Метод малого параметра

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty K_0(y-\eta)g_0^{W-H}(\eta)d\eta = 2V_0\alpha_0, \quad 0<y<\infty$$

(уравнение Винера-Хопфа)

$$g_0(y) = g_0^{W-H}(\lambda - y) + g_0^{W-H}(\lambda + y) - g_0^c(y), \quad g_0^c(y) = 2V_0\alpha_0$$

Приближенная факторизация:

$$L_0(\beta) \approx \sqrt{1+\gamma^2\beta^2}\,\frac{1+\mu^2\beta^2}{1+\nu^2\beta^2}, \quad \left(\frac{\gamma\mu^2}{\nu^2} = b_0\right),$$

погрешность 3.5%

$$\mu = 2.358, \ \nu = 3.952, \ \gamma = b_0\nu^2/\mu^2 = 7.989$$

$$G_0^{W-H}(p) = 2V_0\alpha_0\left[\frac{1}{p\sqrt{1+\gamma p}} + \frac{\nu-\mu}{(1+\mu p)\sqrt{1+\gamma p}}\right] \qquad (p = -i\beta)$$

$$g_0^{W-H}(y) = 2V_0\alpha_0\left[\mathrm{Erf}\left(\sqrt{\frac{y}{\gamma}}\right) + \frac{(\nu-\mu)e^{-y/\mu}}{\sqrt{\mu(\mu-\gamma)}}\,\mathrm{Erf}\left(\sqrt{\frac{\mu-\gamma}{\mu\gamma}\,y}\right)\right],$$

Вычисление подъемной силы:

$$c_P = 2\pi\alpha_0\left[\left(2-\frac{a_0}{\lambda}\right)\mathrm{Erf}\left(\sqrt{\frac{2\lambda}{\gamma}}\right) - 1 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi\lambda}}\,e^{-2\lambda/\gamma} - \frac{c_0}{\lambda}e^{-2\lambda/\mu}\,\mathrm{Erfi}\left(\sqrt{\frac{2\lambda}{\delta}}\right)\right],$$

$$a_0 = \gamma/2 + \mu - \nu = 2.401, \quad c_0 = \frac{(\nu-\mu)\sqrt{\mu}}{\sqrt{\gamma-\mu}} = 1.032, \quad \delta = \frac{\mu\gamma}{\gamma-\mu} = 3.345$$

$$c_P = 2\pi\alpha_0\left[1-\frac{2.401}{\lambda}+e^{-0.2504\lambda}\left(\frac{6.458}{\lambda^{3/2}}-\frac{6.035}{\lambda^{5/2}}\right)\right]$$

λ	метод ДВ	Наш метод	Формула Глауэрта: $2\pi\lambda\ /\ (\lambda+2)$
30	5.43	5.78 / 6.4%	5.89 / 8.5%
20	5.18	5.53 / 6.8%	5.71 / 10.2%
15	4.98	5.29 / 6.2%	5.54 / 11.2%
10	4.63	4.87 / 5.2%	5.24 / 13.2%
7.5	4.37	4.54 / 3.9%	4.96 / 13.5%
5	4.03	4.11 / 2.0%	4.49 / 11.4%
4	3.79	3.94 / 4.0%	4.19 / 10.6%
3	3.33	3.79 / 13.8%	3.77 / 13.2%